$y' = Ay \qquad y(0) = y_0$

has unique solution $\quad y(t) = e^{At} \cdot y_0$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$ what if A is not diagonalizable?

EG $\quad Nt = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{Nt} = I + Nt + \cancel{\frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \cdots}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $e^{A+B} = e^A e^B$ if $AB = BA$

$\quad = e^B e^A$

$I + (A+B) + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \cdots$

$(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots)(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \cdots)$
$= I + A + B + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + AB + \cdots$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$
$= A^2 + AB + BA + B^2$

- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

EG $\quad y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} y \qquad y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = 2I + N \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$y(t) = e^{At}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2It + Nt}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{2It} e^{Nt} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1+t \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} (-1+t)e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$